Appunti e dimostrazioni per il corso
ECONOMIA POLITICA II – Corso B

1 Tasso di variazione (crescita) del prodotto (e quoziente) di variabili

Consideriamo la variabile z che al tempo t è il prodotto delle variabili x e y nello stesso periodo:

$$z_t = x_t y_t .$$

Al tempo t, x_t può essere anche riscritta come $x_{t-1} + \Delta x$, con $\Delta x = x_t - x_{t-1}$ e analogamente y_t come $y_{t-1} + \Delta y$ (con $\Delta y = y_t - y_{t-1}$). Per cui abbiamo:

$$z_t = (x_{t-1} + \Delta x)(y_{t-1} + \Delta y) = x_{t-1}y_{t-1} + x_{t-1}\Delta y + \Delta x y_{t-1} + \Delta x \Delta y .$$

Dividendo per $z_{t-1} = x_{t-1}y_{t-1}$, otteniamo:

$$\frac{z_t}{z_{t-1}} = \frac{x_{t-1}y_{t-1}}{x_{t-1}y_{t-1}} + \frac{x_{t-1}\Delta y}{x_{t-1}y_{t-1}} + \frac{\Delta x y_{t-1}}{x_{t-1}y_{t-1}} + \frac{\Delta x}{x_{\boldsymbol{t-1}}} \cdot \frac{\Delta y}{y_{t-1}} = 1 + \frac{\Delta y}{y_{t-1}} + \frac{\Delta x}{x_{\boldsymbol{t-1}}} + \frac{\Delta x}{x_{\boldsymbol{t-1}}} \cdot \frac{\Delta y}{y_{t-1}}$$

o, equivalentemente:

$$\frac{z_t}{z_{t-1}} - 1 = \frac{\Delta y}{y_{t-1}} + \frac{\Delta x}{x_{\boldsymbol{t-1}}} + \frac{\Delta x}{x_{\boldsymbol{t-1}}} \cdot \frac{\Delta y}{y_{t-1}} .$$

Si noti che l'ultimo addendo del lato destro dell'equazione, ossia $(\Delta x/x_{t-1})(\Delta y/y_{t-1})$ è un prodotto tra tassi di crescita (per fare un esempio attinente variabili macroeconomiche, potrebbe essere il prodotto tra il tasso di inflazione e il tasso di crescita del PIL reale). Se tali tassi di crescita sono piccoli (in particolare se sono minori di uno e vicini a zero, ad es. 2% = 0,02), il loro prodotto sarà ancora più piccolo, per cui possiamo approssimarlo a zero: $\Delta x/x_{t-1} \cdot \Delta y/y_{t-1} \approx 0$. Inoltre, considerando che $z_t/z_{t-1} - 1 = \Delta z/z_{t-1}$ rappresenta il tasso di variazione della variabile z nel tempo t, otteniamo che:

$$\frac{\Delta z}{z_{t-1}} \approx \frac{\Delta y}{y_{t-1}} + \frac{\Delta x}{x_{\boldsymbol{t-1}}}$$

ossia il tasso di crescita di z nel tempo t è (approssimativamente) uguale alla somma dei tassi di crescita di x e y nello stesso periodo (si noti che l'approssimazione è tanto più precisa tanto più $\Delta x/x_{t-1}$ e $\Delta y/y_{t-1}$ sono piccoli e quindi il loro prodotto tende a zero).

Stabilito questo risultato, è immediato (e intuitivo) definire il tasso di crescita di un quoziente di variabili come (all'incirca) uguale al tasso di crescita della variabile che sta al numeratore meno il tasso di crescita della variabile che sta al denominatore, ossia:

$$z_t = \frac{x_t}{y_t} \Rightarrow \frac{\Delta z}{z_{t-1}} \approx \frac{\Delta x}{x_{t-1}} - \frac{\Delta y}{y_{\boldsymbol{t-1}}} .$$